**LOGIKA MATEMATIKA**

**A.Pengertian Logikadan Proposisi**

**1. LOGIKA**

***Logika*** adalahilmu yang mempelajari secara sistematis kaidah-kaidah penalaran yang abstrak atau valid.

Logika/Penalaran terbagi atas 2:

a. Penalaran deduktif: penalaran yang didasarkan pada premis-premis yang diandaikan benar untuk menarik suatu kesimpulan dengan mengikuti pola penalaran tertentu.

b. Penalaran induktif: penalaran yang didasarkan pada premis-premis yang bersifat faktual untuk menarik kesimpulan yang berlaku.

**2. PROPOSISI**

*Proposisi* adalah kalimat berita atau pernyataan berupa Kalimat yang mempunyainilaikebenaran (benar atau salah).

a. Pernyataan primer: pernyataan yang tidak mengandung kata hubung kalimat (pernyataan tunggal/pernyataan atom).

b. Penyataan majemuk: pernyataan yang mengandung satu atau lebih kata hubung kalimat.

Penjelasan:

. "689 > 354" = Ini adalah pernyataan dan merupakan proposisi. Nilainya benar.

. "Tembok Berlin adadi Jepang." = Ini adalah pernyataan dan merupakan proposisi. Nilainya salah.

. "100000 < X" =Ini adalah pernyataan tetapi bukan merupakan proposisi. Belum ada nilainya karena merupakan kalimat terbuka. Disebut juga sebagai fungsi proposisi.

**B. Negasi, Konjungsi, dan Disjungsi**

**1. NEGASI**

***Negasi/*** *ingkaran* merupakan operasilogika yang dilambangkan dengan tanda "~" .atau "¬". Ingkaran pernyataan p adalah ~p atau dibaca "tidakbenar bahwa p" atau "non p" atau "negasidarip".

|  |  |
| --- | --- |
| **P** | **~P** |
| B | S |
| S | B |

Contoh:

p : Kucing makan ikan.

~p : Kucing tidak makan ikan.

~p : Tidakbenar bahwa kucing makan ikan.

**2. KONJUNGSI**

***Konjungsi*** merupakan operasi logika yang dilambangkan " ∧ " dan dibaca "dan". Dari pernyataan p dan pernyataan q dapat disusun pernyataan "p ∧ q" dibaca "pdan q".

Contoh:

p : Ibu memasak sosis.

q : Ibu mencuci piring.

p^q: Ibu memasak sosis dan mencuci piring.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **P** | **Q** | **P ^ Q** |
| S | S | S |
| S | B | S |
| B | S | S |
| B | B | B |

**3. DISJUNGSI**

*Disjungsi* merupakan operasilogika yang dilambangkan "V" dan dibaca "atau". Dari pernyataan p dan pernyataan q dapat disusun pernyataan" p V q" dibaca "p

atau q".

Disjungsidibedakan menjadidua macam yaitu disjungsi inklusif dan disjungsi eksklusif.

**a. Disjungsi inklusif**

adalah jika p dan q merupakan duabuah per-nyataan maka "p ∨ q"

bernilai benar (B) jika p dan q keduanya bernilai benar, atau salah satu bernilai salah, sebaliknya "p ∨ q" bernilai salah (S) jika keduanya bernilai

salah.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **P** | **Q** | **PV Q** |
| **B** | **B** | **B** |
| **B** | **S** | **B** |
| **S** | **B** | **B** |
| **S** | **S** | **S** |

**b. Disjungsi Eksklusif**

adalah jika p dan q merupakan dua buah pernyataan maka "p ∨ q" bernilai benar (B) jika salahsatu bernilai salah (S) atau salah satu bernilai (B), sebaliknya "p ∨ q" bernilai salah (S) jika keduanya bernilai benar (B) atau keduanya bernilai salah (S).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **P** | **Q** | **PV Q** |
| B | B | S |
| B | S | B |
| S | B | B |
| S | S | S |

**C.Implikasidan Biimplikasi**

**1. IMPLIKASI**

Implikasi(Conditional) adalah operasi penggabungan dua buah pernyataan yang menggunakan penghubun logika “Jika... Maka...” yang lambangnya “ “ . implikasidari pernyataan P dan Qditulis “ P Q” dan dibaca “Jika P maka Q” .

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **P** | **Q** | **P** | **Q** |
| B | B | B | |
| B | S | S | |
| S | B | B | |
| S | S | B | |

**2. BIIMPLIKASI**

Biimplikasi(bikondisional) adalah pernyataan majemuk yang menggunakan penghubung logika “... Jika dan hanya jika...” dan diberi lambang “  “ . Biimplikasidari pernyataan P dan ditulis “P  Q” dibaca “P jika dan hanya

jika Q.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **P** | **Q** | **P** | **Q** |
| B | B | B | |
| B | S | S | |
| S | B | S | |
| S | S | B | |

**D.Varian proposisibersyarat**

. Konvers : q à p

. Invers : ~p à ~q

. Kontraposisi : ~q à ~p

Contoh :

Perhatikan contoh kondisional berikut :

“Jika PakAli seorang haji, makaia seorang muslim”

 Konvers : “Jika Pak ali seorang muslim, maka ia seorang haji”

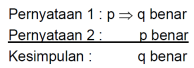
 Invers : “Jika Pak Ali bukan seorang haji, maka ia bukan seorang muslim”

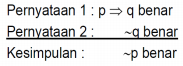
 Kontrapositif : “Jika Pak Alibukan seorang muslim, makaia bukan seorang haji.”

**E. Penarikan Kesimpulan (Inferensi)**

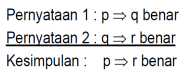
Dalam logikamatematika ada beberapa penarikan kesimpulan yang sah, diantaranya adalah :

**> Modus Ponen**

**> Modus Tollens**



**> Silogisme hipotetis**



**> Silogisme disjungtif**

p v q

~p

Kesimpulan : q

**> Simplifikasi**

p ^ q

kesimpulan : p

**> Penjumlahan**

P

Kesimpulan : p v q

**> Konjungsi**

p

q

 ~~K~~es~~i~~mp~~ul~~an:p ~~^ q~~

**F. Argumen**

Argumen dikatakan valid jika konklusi benar dan semua hipotesisnya benar, jika sebaliknya argumen dikatakan invalid. Argumen Adalah sederetan proposisi yang dituliskan sebagai :

p1

p2

.

.

.pn

Kesimpulan q

**HIMPUNAN**

**A.Definisi Himpunan**

Himpunan (*set*) adalahkumpulan objek-objek yang *berbeda*. Objek didalam himpunan disebut elemen, unsur, atau anggota. HMTI adalah contoh sebuah himpunan, di dalamnya berisi anggota berupa mahasiswa. Tiap mahasiswa berbeda satu sama lain.

**B. Cara Penyajian Himpunan**

**1. ENUMERASI**

Setiap anggota himpunan didaftarkan secara rinci.

Contoh:

- Himpunan empat bilangan asli pertama: *A* = {1, 2, 3, 4}.

- Himpunan lima bilangan genap positif pertama: *B* = {4, 6, 8, 10}.

- *C* = {kucing, *a*, Amir, 10, paku}

- *R* = { *a*, *b*, {*a*, *b*, c}, {*a*, *c*} }

- *C* = {*a*, {*a*}, {{*a*}} }

- *K* = { {} }

- Himpunan 100 buah bilangan asli pertama: {1, 2, ..., 100 }

- Himpunan bilangan bulat ditulis sebagai {…, -2, -1, 0, 1, 2, …}.

**Keanggotaan**

*x* = *A* : *x* merupakan anggota himpunan *A*;

*x* 生 *A* : *x*bukan merupakan anggota himpunan *A*.

Contoh:

Misalkan: *A* = {1, 2, 3, 4}, *R* = { *a*, *b*, {*a*, *b*, c}, {*a*, *c*} }

*K* = {{}}

maka

3 = *A*

{*a*, *b*, *c*} = *R*

*c* 生 *R ,* dan ,{} = *K* , dan {} 生 *R*

**2. SIMBOL-SIMBOL BAKU**

**P** = himpunan bilangan bulat positif = { 1, 2, 3, ... }

**N** = himpunan bilangan alami (natural) = { 1, 2, ... }

**Z** = himpunan bilangan bulat = { ..., -2, -1, 0, 1, 2, ... }

**Q** = himpunan bilangan rasional

**R** = himpunan bilangan riil

**C** = himpunan bilangan kompleks

Himpunan yang universal: **semesta**, disimbolkan dengan U.

Contoh: Misalkan U = {1, 2, 3, 4, 5} dan *A* adalah himpunan bagian dari U, dengan *A* = {1, 3, 5}.

Notasi: { *x* syarat yang harus dipenuhioleh*x* }

**3. NOTASI PEMBENTUK HIMPUNAN**

**Contoh**

Diagram Venn:

(i) *A* adalah himpunan bilangan bulat positif kecil dari 5

*A* = { *x* | *x* bilangan bulat positif lebih kecil dari 5}

atau *A* = { *x* | *x P*, *x* < 5 }

yang ekivalen dengan *A* = {1, 2, 3, 4}

(ii) *M* = { *x* | *x* adalah mahasiswa yang mengambil kuliah matematika diskrit}

**4. DIAGRAM VENN**

**Contoh :**

Misalkan U = {1, 2, …, 7, 8},

*A* = {1, 2, 3, 5} dan *B* = {2, 5, 6, 8}.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *U* | *A B*  8  1  3  2  5  6 | 7  4 |

**C. KARDINALITAS**

Jumlah elemen didalam *A* disebut **kardinal** dari himpunan *A*. Notasi: *n*(*A*)

atau *A*

**Contoh :**

(i) *B* = { *x* | *x* merupakan bilangan prima lebih kecil dari 20 },

atau *B* = {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19} maka *B* = 8

(ii) *T* = {kucing, *a*, Amir, 10, paku}, maka *T* = 5

(iii) *A* = {*a*, {*a*}, {{*a*}} }, maka *A* = 3

**D. HIMPUNAN KOSONG (*NULL SET*)**

Himpunan dengan kardinal = 0 disebut himpunan kosong (*null set*). Dengan Notasi :  atau {}.

**Contoh**

(i) *E* = { *x* | *x* < *x* }, maka *n*(*E*) = 0

Diagram Venn:

(ii) *P* = { orang Indonesia yang pernah kebulan }, maka *n*(*P*) = 0

(iii) *A* = {*x* | *x* adalah akar persamaan kuadrat *x*2 + 1 = 0 }, *n*(*A*) = 0 . himpunan {{ }} dapat juga ditulis sebagai {}

. himpunan {{ }, {{ }}} dapat juga ditulis sebagai {, {}}

. {} bukan himpunan kosong karena ia memuat satu elemen yaitu himpunan kosong.

**E. HIMPUNAN BAGIAN (*SUBSET*)**

Himpunan *A* dikatakan himpunan bagian dari himpunan *B* jika dan hanya jika setiap elemen *A* merupakan elemen dari *B*. Dalam hal ini, *B* dikatakan *superset* dari*A*. dengan Notasi: *A*  *B.*

|  |  |
| --- | --- |
| *U* | *B*  *A* |

Contoh :

(i) { 1, 2, 3}  {1, 2, 3, 4, 5}

(ii) {1, 2, 3}  {1, 2, 3}

(iii) N Z R C

(iv) Jika *A* = { (*x*, *y*) | *x* + *y* < 4, *x* , *y* 0 } dan

*B* = { (*x*, *y*) | 2*x* + *y* < 4, *x* 0 dan*y* 0 }, maka *B A*.

**Teorema 1**

 Untuk sembarang himpunan Aberlakuhal-hal sebagai berikut:

 A adalah himpuan bagian dariA itu sendiri (yaitu,*A A*).

 Himpuan kosong merupakan himpunan bagian dari ( A)

 Jika *A*  *B* dan *B*  *C*, maka *A*  *C*

 *A*  *B* berbedadengan *A*  *B*

*(i) A*  *B* : *A* adalah himpunan bagian dari *B* tetapi*A*  *B*.

Diagram Venn :

*A* adalah himpunan bagian sebenarnya (*proper subset*) dari *B*. Contoh: {1} dan {2, 3} adalah *proper subset* dari {1, 2, 3}

*(ii) A*  *B* : digunakan untuk menyatakan bahwa *A* adalah himpunan bagian (*subset*) dari *B* yang memungkinkan *A* = *B*

> *A* dan *A A*, maka dan *A* disebut himpunan bagian tak sebenarnya (*improper subset*) dari himpunan *A*.

Con : *A* = {1, 2, 3}, maka {1, 2, 3} dan  adalah*improper subset* dari*A*.

**F. HIMPUNAN YANG SAMA**

> *A* = *B* jika dan hanya jika setiap elemen *A* merupakan elemen *B* dan sebaliknya setiap elemen *B* merupakan elemen *A*.

> *A* = *B* jika *A* adalah himpunan bagian dari *B* dan *B* adalah himpunan bagian

dari*A*. Jika tidakdemikian, maka *A*  *B*.

**>** Notasi : *A* = *B*  *A*  *B* dan *B*  *A.*

**>** Untuk tiga buah himpunan, *A*, *B*, dan *C* berlaku aksioma

berikut:

(a) *A* = *A*, *B* = *B*, dan *C* = *C*

(b) jika *A* = *B*, maka *B* = *A*

(c) jika *A* = *B* dan *B* = *C*, maka *A* = *C*

**G. HIMPUNAN YANG EKIVALEN**

Himpunan *A* dikatakan ekivalen dengan himpunan *B* jika dan hanya jika kardinal darikedua himpunan tersebut sama. Notasi : *A* ~ *B*  *A* = *B*

**H. HIMPUNAN SALING LEPAS**

Dua himpunan A dan B dikatakan saling lepas (*disjoint*) jika keduanya tidak memiliki elemen yang sama. Notasi : *A* // *B*

|  |  |
| --- | --- |
| *U* | *B*  *A* |

**I. HIMPUNAN KUASA**

Himpunan kuasa (*power set*) dari himpunan *A* adalah suatu himpunan yang elemennya merupakan semua himpunan bagian dari *A*, termasuk

himpunan kosong dan himpunan *A* sendiri . Notasi : *P*(*A*) atau 2*A*

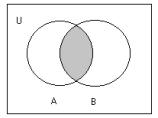
Jika | *A* | = *m*, maka | *P*(*A*)| = 2*m*.

**Contoh :** Jika *A* = { 1, 2 }, maka *P*(*A*) = { , { 1 }, { 2 }, { 1, 2 }}

**J. OPERASI TERHADAP HIMPUNAN**

**1. Irisan (*intersection*)**

. Notasi : *A* 八 *B* = { *x* l *x* = *A* dan *x* = *B* }



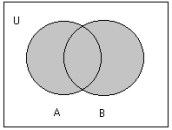
Contoh

(i) Jika *A* = {2, 4, 6, 8, 10} dan *B* = {4, 10, 14, 18}, maka *A* 八 *B* = {4, 10}

(ii) Jika *A* = { 3, 5, 9 } dan *B* = { -2, 6 }, maka *A B* = . Artinya: *A* // *B.*

**2. Gabungan (*union*)**

. Notasi : *A* 不 *B* = { *x* l *x* = *A* atau *x* = *B* }



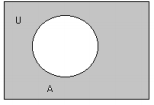
Contoh :

(i) Jika *A* = { 2, 5, 8 } dan *B* = { 7, 5, 22 }, maka *A B* = { 2, 5, 7, 8, 22 }

**(**ii) *A* = *A*. 3.

**3. Komplemen (*complement*)**

Notasi : *A* = { *x x* U, *x*  *A* }



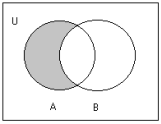
Contoh :

Misalkan U = { 1, 2, 3, ..., 9 },

(i) jika *A* = {1, 3, 7, 9}, maka *A* = {2, 4, 6, 8}

(ii) jika *A* = { *x* | *x*/2 *P*, *x* < 9 }, maka *A* = { 1, 3, 5, 7, 9 }

**4. Selisih (*difference*)**



Notasi : *A* – *B* = { *x x*  *A* dan *x*  *B* } = A  Contoh :

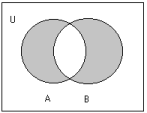
*B*

(i) Jika *A* = { 1, 2, 3, ..., 10 } dan *B* = { 2, 4, 6, 8, 10 }, maka *A* – *B* = { 1, 3, 5, 7, 9 } dan *B* – *A* =

(ii) {1, 3, 5} – {1, 2, 3} = {5}, tetapi {1, 2, 3} – {1, 3, 5} = {2}

**5. Beda Setangkup (*Symmetric Difference*)**

Notasi: *A*  *B* = (*A*  *B*) – (*A*  *B*) = (*A* – *B*)  (*B* – *A*)



**Contoh :**

Jika *A* = { 2, 4, 6 } dan *B* = { 2, 3, 5 }, maka *A B* = { 3, 4, 5, 6 }

**6. Perkalian Kartesian (*cartesian product*)**

Notasi: *A*  *B* = {(*a*, *b*) *a*  *A* dan *b*  *B* }

**Contoh :**

(i) Misalkan *C* = { 1, 2, 3 }, dan *D* = { *a*, *b* }, maka *C*  *D* = { (1, *a*), (1, *b*), (2, a), (2, *b*), (3, *a*), (3, *b*) }

(ii) Misalkan *A* = *B* = himpunan semua bilangan riil, maka *A*  *B* = himpunan semua titik di bidang datar.

**K. PARTISI**

Partisi dari sebuah himpunan *A* adalah sekumpulan himpunan bagian tidak kosong *A*1, *A*2, … dari*A* sedemikian sehingga:

(a) *A*1  *A*2  … = *A*, dan

(b) *Ai*  *Aj* =  untuk*i*  *j*

**Contoh :** Misalkan *A* = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8},

maka { {1}, {2, 3, 4}, {7, 8}, {5, 6} } adalah partisi*A*.